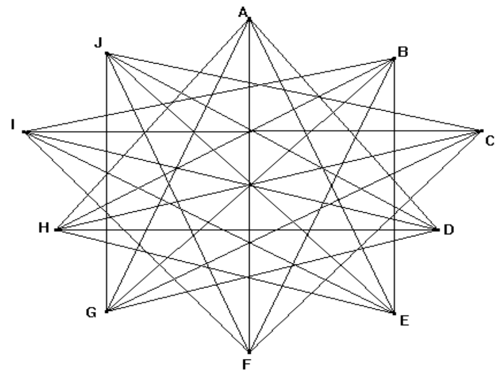
MATEMÁTICA DISCRETA II

Ejercicio 1 (10 ptos.)

En la red de distribución de gas de una zona de la ciudad, representada en la figura siguiente, se ha detectado una avería. El técnico encargado de repararla tendrá que recorrer todos los vértices de la red para comprobar las conexiones.



a) ¿Puede revisar todos los vértices sin pasar dos veces por el mismo y volviendo al vértice inicial?

b) Los números anotados en la siguiente tabla indican el coste de reparación de cada tramo de la red. Suponiendo que todos los tramos están defectuosos, se decide reparar de forma urgente sólo los tramos que permitan la conexión entre los nodos A y C. ¿Cuáles serán los tramos que hay que reparar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál será el coste total de esta reparación?

	D	E	F	G	H	I	J
A	7	9	14	16	20		
B		19	4	3	1	7	
C			6	15	18	13	12
D				20	12	7	6
E					9	17	4
F						2	1
G							8

Solución

a) Puede revisar todos los vértices sin pasar dos veces por el mismo y volviendo al vértice inicial, ya que card V = 10 $\geq$ 3 y $\delta(u) \geq 5$, $\forall\ u \in$ V, entonces existe un camino hamiltoniano cerrado (Teorema de Dirac).

b) Las conexiones mínimas, entre A y C se obtienen aplicando el Algoritmo de Dijkstra.

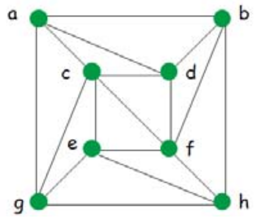
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	∞	∞	**7**	9	14	16	20	∞	∞
	∞	∞		**9**	14	16	19	14	13
	28	25			14	16	18	14	**13**
	28	20			**14**	16	18	14	
	18	20				16	18	**14**	
	18	20				**16**	18		
	18	20					**18**		
	18	20							
		20							

Los tramos que hay que reparar para que el coste sea mínimo son AF y FC.

El coste total de esta reparación entre A y C es 20.

Ejercicio 2 (5 ptos.)

Construir, aplicando el algoritmo correspondiente, un camino euleriano abierto o cerrado, en el grafo



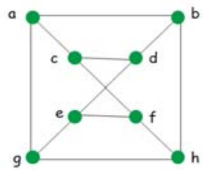
Solución

Sólo hay dos vértices de grado impar: {c, f}, entonces existe un camino euleriano abierto de c a f.
Aplicando el algoritmo de Hierholzer, se construyen los caminos
C_1:= [c, f], C_2:= [c, d, f, e, c], C_3:= [c, a, d, b, f, h, e, g, c], C_4:= [a, b, h, g, a], entonces
C:= [c, [c, [c, a, [a, b, h, g, a], d, b, f, h, e, g, c], d, f, e, c], f] es un camino euleriano abierto.

Ejercicio 3 (10 ptos.)

a) Un grafo plano y conexo descompone al plano en 12 regiones, cada una de ellas limitada al menos por 5 aristas. ¿Qué se puede decir del número de vértices que posee?

b) Justificar si es o no es planar el grafo siguiente:



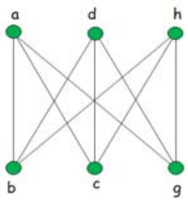
Solución

a) Se tiene que

$$5c \leq \sum_{1}^{n} \delta(c) = 2q \Rightarrow q \geq \frac{5c}{2} = \frac{5.12}{2} = 30$$

y según la fórmula de Euler, $n = q - c + 2 \geq 30 - 12 + 2 = 20$

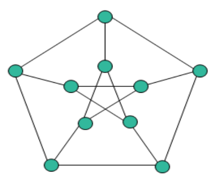
b) Haciendo una contracción del grafo con la arista ed y con la arista fh, se obtiene $K_{3,3}$



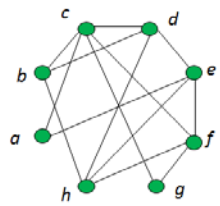
Por el Teorema de Wagner, el grafo no es planar.

Ejercicio 4 (4 ptos.)

a) Construir un conjunto independiente maximal en el grafo de Petersen.

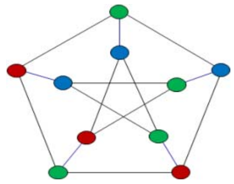


b) Aplicando el algoritmo de Brelaz, hallar razonadamente el número cromático del grafo siguiente:



Solución

a) Conjuntos independientes maximales



b) G es conexo y no regular, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G) = 5$

G tiene ciclos de longitud 3, entonces $3 \leq \chi(G)$

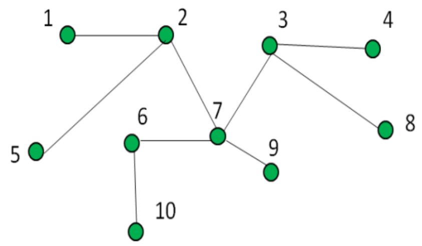
El algoritmo de Brelaz colorea con 3 colores: color 1:= [c, h], color 2:= [d, f, a], color 3:= [e, g, b]

Por tanto, $\chi(G) = 3$

Ejercicio 5 (6 ptos.)

a) Definir índice cromático de un grafo. ¿Qué valores puede tomar?

b) Hallar el índice cromático del árbol siguiente:



c) Calcular el polinomio cromático del ciclo C_4.

Solución

a) Índice cromático de $G \equiv$ mínimo $k \in \mathrm{N}$ necesario para una coloración de aristas.

Teorema de Vizing : Si G es un grafo simple entonces $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + 1$

b) $4 = \Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + 1 = 5$

color A= [{7, 2}, {3, 4}, {6, 10}], color B= [{7, 3}, {1, 2}], color C= [{7, 6}, {2, 5}, {3, 8}], color D= [{7, 9}]

c) Sea a una de las aristas de C_4

$C_4 - a$ es un camino P_4, luego el polinomio cromático es $P(C_4 - a, k) = k(k-1)^3$.

C_4 / a es un K_3, luego el polinomio cromático es $P(C_4 / a, k) = k(k-1)(k-2)$.

Por tanto, el polinomio cromático es $P(C_4, k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k$